AF pour les espaces homogènes.

Ambrosi E.

$X/\mathbb{R}$ espace homogène :

$$X(\mathbb{C}) \cong \frac{G(\mathbb{C})}{H(\mathbb{C})} \qquad H \subseteq G \subseteq GL_n(\mathbb{C})$$

$G \curvearrowright X$ sous-groupes algébrique

<u>Ex</u> $G = GL_2$

$H = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ $\qquad G/H \cong \mathbb{P}^1$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto [a : c]$

<u>Thm</u> si G connexe, X satisfait AF (sous un G-tors sur X)

1. Torseurs et théorème de descente

AF_X approximation fine

RC_X rationnellement connexe

$X' \underset{\text{BIR}}{\dashrightarrow} X$	$RC_X \Leftrightarrow RC_{X'}$	$AF_{X'} \Leftrightarrow AF_X$
$X = \mathbb{P}^m_{\mathbb{R}}$	RC_X EST VRAI	AF_X EST VRAI
$X' \to X$ DOMINANT	STARR GRABER-HARRIS $RC_X + RC_{X_x} \Downarrow RC_{X'}$	$AF_X + AF_{X_x} \Downarrow AF_{X'}$

$AF_X \Rightarrow RC_X$

<u>CONJ</u> : $RC_X \Rightarrow AF_X$

<u>RMK</u>
SI $X' \to X$ ALORS $RC_{X'} \Rightarrow RC_X$

<u>QST</u> $AF_{X'} \Rightarrow AF_X$?

UTILE:

$$\mathbb{C}^* \curvearrowleft \sigma \qquad \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle \sigma \rangle$$

$$\sigma(z) := \frac{1}{\bar z}$$

$$1 \to \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \twoheadrightarrow \mathbb{C}^* \to 1 \quad \mathbb{R}\text{-[illegible]}$$

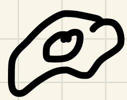
$$(x, y) \longmapsto \frac{x}{y}$$

$$\sigma(x, y) := (\bar y, \bar x)$$

DIFFICILE:

$$X' \twoheadrightarrow X \qquad X'(\mathbb{R}) = \emptyset$$

$$X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$$



$$\{x^2+y^2+1\} \subseteq \{x^2+y^2+1=0\} \subseteq \mathbb{A}^2_{(x,y)}$$

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ AGT liberamente

$$\downarrow \circlearrowleft \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \qquad \downarrow \; y \mapsto -y \qquad \downarrow$$

$$\mathbb{A}^1 - \{0\} \subseteq \mathbb{A}^1 \qquad\qquad x$$

JE VAIS TORDRE L'ACTION:

$$\left(\frac{\mathbb{R}[x,y,z]}{(x^2+y^2+1,\ z^2+1)}\right)^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \quad \begin{array}{l} y \mapsto -y \\ z \mapsto -z \end{array}$$

$$\|$$

$$\frac{\mathbb{R}[x,\tilde{y}]}{(x^2-\tilde{y}^2+1)}$$

$\tilde{y} = yz$

$(x, \cancel{y^2}, \cancel{z^2}, yz)$

$(yz)^2 = \tilde{y}$

$\|$

$-(-x^2-1)$

$x^2-\tilde{y}^2+1=0$ $\|$ x^2+1

$$\{x^2-y^2+1=0\}(\mathbb{R})$$

$$\downarrow \wr$$

$$\mathbb{A}^1 - \{0\}(\mathbb{R})$$

<u>DÉF</u> $G/\mathbb{R}$ GROUPE SUR $\mathbb{R}$,

UN G-TORSEUR À GAUCHE

(À DROITE) SUR X EST UNE VARIÉTÉ $Y \to X$ TEL QUE

- G AGIT SUR Y À GAUCHE (À DROITE)
- LOCALEMENT SUR $X(\mathbb{C})$ (POUR LA TOPOLOGIE ANALYTIQUE!)

$$Y(\mathbb{C}) \cong G(\mathbb{C}) \times X(\mathbb{C})$$

COMPATIBLE AVEC L'ACTION.

<u>EX</u>.

- $\mathbb{G}_m$-TORSEURS $L - \{0\} \to X$
  $\|$ $\qquad\qquad\qquad \uparrow$
  FIBRÉS EN DROITE. $\quad L \to X$

- $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. $\{y^2 + x^2 + 1\}$ EST G-TORSEUR SUR $\mathbb{C}_m$

<u>RMQ</u>

- $Y \cong G \times X \iff Y(X) \neq \emptyset$

$$\underbrace{X \to Y \to X}_{\mathrm{ID.}}$$

$X \to Y \qquad G \times X \xrightarrow{\sim} Y$

n: $\qquad (g, x) \mapsto g \cdot n(x)$

EX $X = \{\bullet\}$ G-TORSEUR SUR $\mathbb{R}$ EST UNE VARIÉTÉ Y TEL QUE $Y(\mathbb{C}) \cong G$, TRIVIAL $Y \cong G \iff Y(\mathbb{R}) \neq \emptyset$

EX $Y = \operatorname{Spec}\left(\dfrac{\mathbb{R}[x]}{(x^2+1)}\right)$ $= \{+i, -i\}$ EST UN $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-TORSEUR SUR $\mathbb{R}$ $(x \mapsto -x)$

TORDU : $Y \to X$ G-TORSEUR SUR X À GAUCHE

Z G-TORSEUR SUR $\mathbb{R}$ À DROITE.

LE TORDU DE Y PAR Z : ${}^{Z}Y := Z \times Y / G$

$$(z, y) \sim (z', y')$$

$$\exists g \in G \ (z \cdot g^{-1}, g \cdot y) = (z', y')$$

$\underline{\text{EX}}$ $Y : X^2 + Y^2 + 1 = 0$ TWIST PAR

$$Z : \frac{\mathbb{R}[X]}{(X^2+1)} \qquad {}^{Z}Y : X^2 - y^2 + 1 = 0$$

$\underline{\text{LEMMA}}$ $\bigcup_{Z} {}^{Z}Y(\mathbb{R}) \twoheadrightarrow X(\mathbb{R})$

Z G-TORSEUR SUR $\mathbb{R}$

$\underline{\text{PREUVE}}$ Z-TORSEUR SUR $\mathbb{R}$

Z^{-1} TORSEUR

$$Z : \quad z \cdot g := g^{-1} z$$

$$Z^{-1} Z(\mathbb{R}) \neq \emptyset \; (\; Z^{-1} Z \underset{2}{=} Z \times Z / \sim$$

$x \in X(\mathbb{R})$

$$\begin{tikzcd} Y_x \arrow[r] \arrow[d, "G"'] & Y \arrow[d, "G"] \\ x \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

$Z^{-1}Z = \frac{Z \times Z}{\sim}$ $\quad \sim : (x,y) \sim (x',y')$

$\exists g$

$(x,y) \sim (gx, gy) = (x \cdot g^{-1}, gy)$

$Z(\mathbb{C}) \xrightarrow{\Delta} Z \times_{\mathbb{R}} Z(\mathbb{C}) \to Z \times_{\mathbb{R}} Z(\mathbb{C}) / \sim \; = Z^{-1}Z(\mathbb{C})$

$\mathrm{im}(\Delta) = \{e\}$ an $(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ stabil.

d.h. $\{e\} \in Z^{-1}Z(\mathbb{R})$.

$(x,x) \sim (gx, gy)$

Y_x est G-torseur sur $\mathbb{R}$ à sinistra

Y_x^{-1} est G-tors à droit

$$\begin{tikzcd}
Y_x^{-1} Y \arrow[r] & X \\
Y_x^{-1} Y_x \arrow[u, hook] \arrow[r] & x \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

$$x \in M \qquad (Y_x^{-1} Y)(\mathbb{R}) \to X(\mathbb{R})$$

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[d, hook] \\
\Omega \arrow[ur, dashed, "?"] \arrow[r] \arrow[dr] & X \times B \arrow[d, hook] \\
 & B
\end{tikzcd}$$

DEF $X \to B \qquad F = \mathbb{R}(B)$

G : F-groupe algébrique.

$\left(G \to U \qquad G \times_U G \xrightarrow[m]{} U \right)$

$\mathcal{T}$ G-TORSEUR À GAUCHE SUR X_F

$$\begin{tikzcd} G \curvearrowright \mathcal{T} \arrow[d] & \\ X_U \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & X \arrow[d] \\ U \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & B \end{tikzcd}$$

ET $\mathcal{T}_U(\mathbb{C}) \simeq G \times_B X(\mathbb{C})$ LOCALEMENT SUR X_U POUR LA TOPOLOGIE ANALYTIQUE.

DEUX TORSEURS $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ SONT ISOMORPHES SI $\exists$ UNE OUV

$U' \subseteq U^{\subseteq B}$ TEL QUE

$$\mathcal{T}_{U'} \simeq \mathcal{T}'_{U'}$$

<u>EX</u> TOUT $\mathbb{G}_m$-TORSEUR SUR F SONT TRIVIAUX

<u>LEMME</u> : $\bigcup_Z {}^Z Y(B) \to X(B)$

Z G-torseur sur F

<u>THM</u> (CALEA)

SI $Y \to X$ EST G-TORSEUR ET A AZUMAYA SUR X

(A)F EST VRAI POUR TOUT ${}^Z Y$, POUR Z G-TORSEURS SUR F À MOINS ALORS

(A)F EST VRAI POUR X.

<u>EX</u> $L \in \mathrm{Pic}(X)$ SI AF EST VRAI POUR $L \setminus \{0\}$ ALORS EST VRAI POUR X.

II GROUPES ALGÉBRIQUES.

THM : SI G EST GROUPE ALGÉBRIQUE CONNEXE SUR F ALORS AF EST VRAI :

(a) G EST TORE

(b) G EST UNIPOTENT

(c) G EST RÉDUCTIF CONNEXE

(d) G EST CONNEXE

(1) Tores sur F = groupe algébrique G tq

tq $\exists\ U' \to U$ $\quad U' \times G \cong U' \times \mathbb{G}_m^n$

EX $\quad \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* / \mathbb{R}$

$\circlearrowright \sigma$

$\mathbb{C}^* \quad \sigma(z) = \frac{1}{\bar{z}}$

AF est vrai pour les tores

CONSTRUCTION :

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, "\mathrm{GAL}"] & U \\ U' \times \mathbb{G}_m^n \arrow[u] \arrow[r] & G \arrow[u, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

$x_0 \dots x_n \quad \mathrm{GAL}(U'/U) = \{g_1 \dots g_m\}$

$$\tilde{G}_{/U} = \prod_g \mathbb{G}_{m,g}^n \twoheadrightarrow \mathbb{G}_m^n$$

$$(x_{1,g} \dots x_{n,g}) \mapsto \big(g(x_1) \dots g(x_n)\big)$$

GAL - ÉQUIVARIANT.

$0 \to H \to \tilde{G} \to G \to 0$

- $\tilde{G}$ EST H-TORSEUR SUR G
- $\tilde{G}$ EST RATIONNEL (DONC ON A $AF_{\tilde{G}}$)

$$\prod_{\sigma} \mathbb{A}^n_m \subseteq \prod_{\sigma} \mathbb{A}^n \quad \text{APM}$$

$$\cong$$

$$\mathbb{A}^{nm}$$

$[L:K] = \langle \alpha_1 \dots \alpha_m \rangle$

$1 \dots$

$\prod \mathbb{A}^1$

$g_i \quad g($

$$(x_{g_1}, \dots, x_{g_n}) \mapsto \left(\sum x_{g_i}, \alpha \sum x_{g_i}\right.$$

$$\mathbb{C}^1 \times \mathbb{C}^1 \subseteq \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$$

$$\downarrow$$

$$\mathbb{A}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x+y, \alpha(x-y))$$

$$\alpha x - \alpha y = \alpha x + g(i) y$$

$$\left(\sum x_{g_i}, \sum g_i(\alpha_1) x_{g_i}, \dots, \sum g_i(\alpha_m) x_{g_i}\right)$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[dr] & \tilde{G} \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[dl] & 1 \\ & & B & & \end{tikzcd}$$

T H-torseur sur B

$T \overset{\tilde{G}}{} \to G$

$\|$ $\qquad T \times_B G$ G-torseur sur G

$T \times_B G \times_G \tilde{G}$

$\diagup\!\!\sim \;\overset{?}{=}\; T \times_B \tilde{G} \diagup\!\!\sim$

$(h, \cancel{t}, \tilde{g}) \sim (hk, \cancel{t}, h\tilde{g})$

$\tilde{G} \curvearrowright$ sur $\quad T \times_B \tilde{G} \diagup\!\!\sim \qquad g \cdot (t, \cdot \tilde{g})$

ET $\quad T \times_B \tilde{G} \diagup\!\!\sim$ EST $\tilde{G}$-torseur sur B $\quad \overset{\shortparallel}{(h, \; \tilde{g} g)}$

$\uparrow$

A DROITE

$\exists B' \to B$

$$B' \times_B T \simeq B' \times H$$

$$B' \times_B \left(\frac{T \times_B \tilde{G}}{\sim} \right) \simeq \frac{B' \times H \times \tilde{G}}{\sim}$$

$$\underset{/\sim}{H \times_K G} \xrightarrow{m} G \qquad h, g \mapsto hg$$

$$\tilde{h}(h, g) = (\tilde{h} h, \tilde{h}^{-1} g) \qquad hg = h'g' \quad (h, g) = (h' g' g^{-1}, g)$$

FACT (HILBERT-90 + SHAPIRO LEMMA)

$T \tilde{G} \simeq \tilde{G}$ sur B

$$\left(\begin{array}{l} H^1(F, \tilde{G}) = 0 \\ \quad \parallel \\ \operatorname{Ext}^1_F(\mathbb{Z}, \tilde{G}) = \operatorname{Ext}^1_F(X^*(\tilde{G}), \mathbb{Z}) \end{array} \right.$$

HILBERT 90th $\qquad \operatorname{Ext}^1_F(X^*(G_m) \otimes \mathbb{Z}[F'/F])$

$$0 \overset{\downarrow}{=} H^1(F', G_m) = \operatorname{Ext}^1_{F'}(X^*(G_m), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{SHAPIRO}} \parallel$$

$T^{\tilde{\hat{G}}} \cong \hat{G}$ sur $\hat{B}$ $\quad T^{\hat{G}}$ A (AF).

paramétrée on A $\quad AF_G$.

(b) Groupes unipotents.

· G unipotent si $\exists$

$$G \subseteq \begin{Bmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{Bmatrix} \subseteq GL_n$$

sur k.

G unipotent $\iff \exists\ G_1 \trianglelefteq \dots G_n \trianglelefteq G$

tel que $\quad G_i / G_{i+1} \cong G_a$

G_a est unipotent.

Par récurrence sur la dimension + filtration.

$0 \to G' \to G \to G_n \to 0$ $\blacksquare$

<u>Ex</u>

$$G = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \frac{G}{G_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \frac{G_2}{G_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \frac{G}{G_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) GROUPE RÉDUCTIF:

G GROUPE

$R_u(G)$ SOUS-GROUPE UNIPOTENT MAXIMAL

$R_u(G) \triangleleft G$ (PAR MAXIMALITÉ)

Ex $U = \begin{pmatrix} \cancel{\ast} & \cancel{\ast} & \cancel{\ast} \\ 0 & \cancel{\ast} & \cancel{\ast} \\ 0 & 0 & \cancel{\ast} \end{pmatrix}$ $\quad R_u(U) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

DEF G RÉDUCTIF SI

$$R_u(G) = \{1\}$$

(c) G RÉDUCTIF CONNEXE

$X =$ VARIÉTÉ DES TORES MAXIMAUX

$$\tilde{X} \subseteq X \times G$$
$$\tilde{X} = \{(T, g) \mid g \in T\}$$

$$X \xleftarrow{\pi_1} \tilde{X} \xrightarrow{\pi_2} G$$

THM X EST RATIONNELLE ET π_2 EST BIRATIONNELLE.

THM $\Rightarrow$ $AF_G \Leftrightarrow AF_{\tilde{X}}$

ET AF_X EST VRAI

$$\pi_2^{-1}(T) \overset{?}{=} \{g \in G \mid g \in T\} = T$$

$\tilde{X} \to X$ A FIBRES TORES. DONC

FIBRATION $+ (*) \Rightarrow AF_{\tilde{X}}$.

RMQ

$\tilde{X} \to G$ BIRATIONNEL.

$\pi_2^{-1}(g) = \{\cdot\} \Leftrightarrow \exists !$ TORE MAXIMAL QUI CONTIENT g.

$\Uparrow$

g REG EST

un tore maximal

THM dit que g^{zon} est un tore maximal pour presque tout g.

<u>EX</u> $G = GL_2$ T tore maximal

$\iff T$ a dimension $= 2$

$$\operatorname{Dim}\left(\overline{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}}\right) \iff \langle x, y \rangle \subseteq K^{\circ}$$

$x, y \in K^{\circ}$ $\qquad \qquad \wr\!\wr$ $\mathbb{Z}^2$

$$\begin{pmatrix} x & \\ & x \end{pmatrix} \qquad \langle x, -x \rangle = \mathbb{Z}.$$

. G - groupe connexe.

$G/R_u(G)$ est réductif.

$$0 \to R_u(G) \hookrightarrow G \to G/R_u \to 0$$

G/R_u AF + $R_u(G)$ AF $\Leftrightarrow$ G AF.

fibration

III Espace hom

X G-espace homogène sur F si

$\exists \; B' \to B \,/\, X' \simeq \dfrac{G \times B'}{H}$ $H \subseteq G \times B'$ sous-groupe

RMQ $X \simeq G/H \iff X(B) \neq \emptyset$

$x \in X(B)$ $\quad G \longrightarrow X$, $\quad g \longmapsto g \cdot x$

$G \twoheadrightarrow X$

$X \simeq \dfrac{G}{\mathrm{Stab}_x}$ PAS NÉCESS. CONNEXE

SI G CONNEXE

THM AF EST VRAI POUR X

PREUVE SOIT

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[dr] & \mathcal{X} \arrow[d] \\ & B \end{tikzcd}$$

← MODÈLE PROPRE.

ON PEUT SUPPOSER QU'IL $\exists$

$$\begin{tikzcd} B(\mathbb{R}) \subseteq \Omega \arrow[r, "g'"] \arrow[dr] & \mathcal{X} \arrow[d] \\ & B \end{tikzcd}$$

CLAIM $X(B) \neq \emptyset$

ON SUPPOSE LE CLAIM

<u>LMA</u> $\Rightarrow$ $X \cong G/H$

G EST H-TORSEUR À GAUCHE SUR B

T H-TORSEUR À DROIT SUR B

IL SUFFIT DE SAVOIR QUE:

T^G A (AF)

$$T(G) = G \times^{T}_{/H} T \qquad \begin{matrix} & & T \\ & \searrow & \downarrow \\ G & \to & B \end{matrix}$$

T^G EST G TORSEUR À DROIT SUR B.

PAR DESCENTE: IL SUFFIT DE SAVOIR QUE

DONC IL SUFFIT DE SAVOIR QUE

$T^G(B) \neq \emptyset$ SI $\exists$ $B(\mathbb{R}) \subset G(B)$

(CAR $\Rightarrow T^G \cong G$)

$T^{G}(B)$ $T^{G}(B)$

1.E. LE CLAIM

SCHEIDERER HASSE PRINCIPLE:

SI $\forall p \in B(\mathbb{R})$ IL $\exists\, U_p \subseteq B(\mathbb{R})$ OUVERT ET SECTION ANALYTIQUE ANALYTIQUE $\sigma_p : U_p(\mathbb{R}) \to X_{U_p}(\mathbb{R})$ [STEINBERG THEOREM]

ALORS $X(B) \neq \emptyset$.

($X_{F_p}(F_p) \neq \emptyset \quad \forall p \in B(\mathbb{R})$; $\parallel$ $X(F_p) \neq \emptyset$)

(EX: SI $B(\mathbb{R}) = \emptyset$ ALORS $X(B) \neq \emptyset$)

DONC IL SUFFIT DE CONSTRUIRE $\sigma_p : U_p(\mathbb{R}) \to X_{U_p}(\mathbb{R})$

$p \in B(\mathbb{R})$

$$X(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{X}(\mathbb{R})$$
$$\nwarrow \quad \Uparrow \; C^\infty$$
$$B(\mathbb{R})$$

WEIERSTRASS APPROXIMATION:

$\forall p \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\quad p \in U_p^{(\mathbb{R})} \to \mathcal{X}(\mathbb{R})$

On peut l'approximation avec fonctions analytiques sur

Il faut savoir que.

$\mathcal{X}(\mathbb{F}_p)$ ensemble des zéros des fonctions analytiques $\quad U_p \to \mathcal{X}$

Si $\mathcal{X}(\mathbb{F}_p) \neq \emptyset$ alors il est dense dan $\mathcal{X}$ pour la topologie de Zariski (théorème de la fonction implicite)

$X(\mathbb{F}_p) \cap \mathcal{X}(\mathbb{F}_p) \neq \emptyset$ $\quad$:) . $\blacksquare$